UNTUK MAHASISWA

TEKNIK SIPIL

INTEGRAL TAK TENTU

Dengan Teori Situasi Didaktis

Dr. Lina Nurhayati, S.Si.,M.Si.
Prof. Dr. H. Didi Suryadi, M.Ed.
Prof. Dr. H. Tatang Herman, M.Ed.
Prof. Siti fatimah, Ph.D.
Nurmala Setianing Putri, M.Pd.
Bill Chairy Rizki Bustaren, M.Pd.

INDONESIA EMAS GROUP

INTEGRAL TAK TENTU

Dengan Teori Situasi Didaktis

INTEGRAL TAK TENTU

Dengan Teori Situasi Didaktis

Dr. Lina Nurhayati, S.Si.,M.Si.
Prof. Dr. H. Didi Suryadi, M.Ed.
Prof. Dr. H. Tatang Herman, M.Ed.
Prof. Siti fatimah, Ph.D.
Nurmala Setianing Putri, M.Pd.
Bill Chairy Rizki Bustaren, M.Pd.

INDONESIA EMAS GROUP

INTEGRAL TAK TENTU DENGAN TEORI SITUASI DIDAKTIS

ISBN
978-634-7311-02-3

Penulis
Dr. Lina Nurhayati, S.Si.,M.Si.
Prof. Dr. H. Didi Suryadi, M.Ed.
Prof. Dr. H. Tatang Herman, M.Ed.
Prof. Siti fatimah, Ph.D.
Nurmala Setianing Putri, M.Pd.
Bill Chairy Rizki Bustaren, M.Pd.

Editor
Dr. Lina Nurhayati, S.Si.,M.Si.

Cover
Tim Penerbit Indonesia Emas Group

Tata Letak
Tim Penerbit Indonesia Emas Group

INDONESIA EMAS GROUP

PENERBIT
INDONESIA EMAS GROUP
Jalan Pasir Putih, No. 16 Kota Bandung
Kontak 082-188-188-540
E-mail: penerbitieg@gmail.com

Cetakan Pertama, Juli 2025
vi+64 hlm., 15,5 cm x 23 cm

PRAKATA

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas terselesaikannya buku yang berjudul "Bahan Ajar Integral tak Tentu dengan Teori Situasi Didaktis untuk Mahasiswa Teknik Sipil". Buku ini bertujuan mengatasi hambatan belajar integral tak tentu, khususnya pada materi pecahan, variabel dan turunan, dengan pendekatan teori situasi didaktis Guy Brousseau.

Buku ini dilengkapi alat bantu teknologi, yaitu Graspable Math untuk memudahkan langkah penyelesaian integral, Desmos Graphic Calculator untuk ilustrasi grafik fungsi, dan Augmented Reality (AR) untuk memperjelas aplikasi integral tak tentu dalam bidang teknik sipil .

Kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah mendukung penyusunan buku ini. Kritik dan saran untuk perbaikan sangat kami harapkan. Semoga buku ini bermanfaat bagi pendidikan teknik sipil.

Bandung, Mei 2025

Penulis

DAFTAR ISI

DESKRIPSI BAHAN AJAR

Buku yang berjudul "Bahan Ajar Integral tak Tentu dengan Teori Situasi Didaktis untuk Mahasiswa Teknik Sipil" ini dirancang berdasarkan prinsip Didactic Design Research (DDR), yang berorientasi pada eksplorasi dan pengembangan pembelajaran berbasis teori didaktis. Pendekatan ini digunakan untuk memahami dan mengatasi hambatan belajar (learning obstacles) yang sering dialami mahasiswa teknik sipil, khususnya dalam materi integral tak tentu yang melibatkan pecahan, variabel fungsi serta turunan.

Dalam desain buku ini, teori situasi didaktis Guy Brousseau diterapkan untuk menciptakan aktivitas pembelajaran yang memungkinkan mahasiswa membangun pemahaman konseptual melalui tahapan devolusi, aksi, formulasi, dan validasi. Tahapan ini membantu mahasiswa menghubungkan konsep abstrak integral dengan aplikasinya pada konteks teknik sipil secara progresif.

Pada bahan ajar ini ada beberapa istilah yang digunakan untuk menyatakan tahapan situasi didaktis dalam setiap aktivitas pembelajarannya, yaitu sebagai berikut.

- Memecahkan Kode Awal merupakan situasi Devolusi dimana Mahasiswa ditantang untuk memahami masalah awal sebagai langkah untuk membangkitkan rasa ingin tahu.
- Eksplorasi merupakan situasi Aksi dimana Mahasiswa melibatkan diri dalam eksplorasi aktif untuk menemukan solusi atau pendekatan terbaik.
- Konseptualisasi merupakan situasi Formulasi dimana Mahasiswa diajak untuk menganalisis hasil dari situasi aksi dan merumuskan pola, aturan, atau konsep formal berdasarkan temuan mereka.

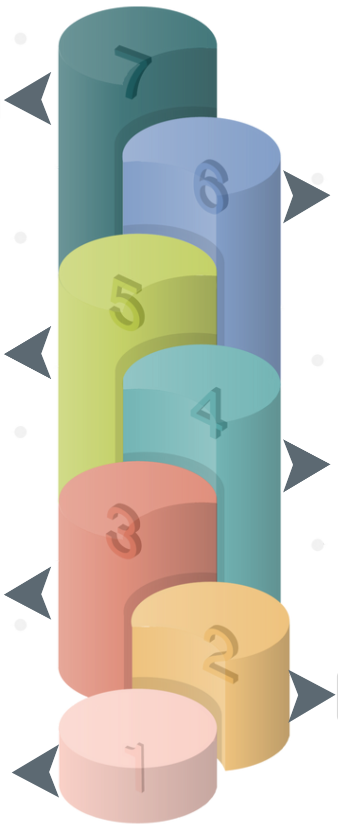
- Verifikasi merupakan istilah yang digunakan dalam buku ini untuk tahapan validasi. Situasi pada tahapan ini untuk menguji dan memastikan keabsahan konsep atau solusi yang telah dirumuskan melalui pembuktian atau analisis kritis.
- Implementasi merupakan proses Institusionalisasi dalam memperkuat dan mengintegrasikan pemahaman ke dalam kerangka teoretis yang lebih luas.

Pendekatan DDR yang digunakan dalam buku ini juga diperkaya dengan integrasi teknologi modern, seperti:

- Graspable Math, untuk mendukung mahasiswa dalam memudahkan langkah-langkah penyelesaian bilangan pecahan dan penjumlahan bilangan negatif dalam perhitungan integral secara interaktif.
- Desmos Graphic Calculator, yang membantu mahasiswa memahami representasi grafik fungsi sebagai langkah penting dalam menghubungkan teori matematika dengan aplikasi praktis.
- Augmented Reality (AR), yang menghadirkan ilustrasi nyata dari permasalahan teknik sipil, seperti distribusi beban dan analisis struktur, sehingga memfasilitasi pemahaman yang lebih intuitif.

Melalui sinergi antara teori didaktis, teknologi, dan penelitian desain didaktis, buku ini diharapkan tidak hanya menjadi referensi pembelajaran integral tak tentu, tetapi juga model implementasi Didactic Design Research dalam pengajaran matematika teknik yang kontekstual dan relevan. Hal ini sejalan dengan tujuan untuk meningkatkan kualitas pembelajaran teknik sipil dan memberikan kontribusi positif pada pengembangan pendidikan berbasis penelitian di Indonesia.

TUJUAN PEMBELAJARAN



Mahasiswa dapat menyelesaikan integral tak tentu dalam masalah bidang teknik sipil

Mahasiswa dapat menghitung teknik integrasi substitusi dan parsial

Mahasiswa dapat menghitung integral tak tentu dengan menggunakan sifat kelinieran integral

Mahasiswa dapat menemukan fungsi dari turunannya dengan menggunakan rumus integral dasar

Mahasiswa mengetahui istilah dan simbol Integral tak tentu

Mahasiswa dapat mendefinisikan suatu fungsi dengan mengetahui turunan dari fungsi tersebut

Mahasiswa dapat mengingat kembali materi turunan sebagai pengetahuan awal

VI

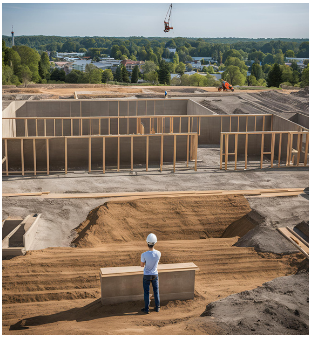
1

TUJUAN PEMBELAJARAN

MAHASISWA DAPAT MENGINGAT KEMBALI MATERI TURUNAN SEBAGAI PENGETAHUAN AWAL

MEMECAHKAN KODE AWAL

Mengingat kembali Fungsi



Di lokasi konstruksi jembatan, seorang mahasiswa teknik sipil, mengamati fondasi yang sedang dipasang. Ia menyadari bahwa tekanan tanah di bawah fondasi cenderung tetap di seluruh area, mirip dengan fungsi konstan, di mana nilai tekanan tidak berubah.
Kemudian, ia melihat balok baja yang didesain untuk menahan beban dari kendaraan. Beban yang diterima balok tersebut bervariasi, namun pola distribusinya dapat digambarkan seperti fungsi linear, dengan peningkatan atau penurunan beban yang sebanding di sepanjang balok.
Saat balok tersebut dipasang, Iateringat pada fungsi kuadrat. Beban yang lebih besar di tengah balok dan semakin kecil ke arah ujungnya mengingatkan pada pola lengkungan parabola. Terakhir, ketika melihat simulasi komputer yang memperkirakan defleksi balok akibat beban, Ia berpikir tentang fungsi polinomial, di mana perubahan bentuk balok dapat digambarkan dengan lebih kompleks, menggambarkan bagaimana defleksi bergantung pada beberapa faktor sekaligus. Ia menyadari bahwa berbagai fungsi matematika ini sangat penting dalam merancang struktur yang efisien dan aman.

INVESTIGASI

video animasi Fungsi konstan

Fungsi konstan dengan Desmos grafik

1. JELASKAN DENGAN KATA-KATAMU APA YANG DIMAKSUD DENGAN FUNGSI KONSTAN

Jawab:

2. BERIKAN SATU CONTOH FUNGSI KONSTAN DAN GAMBARKAN GRAFIKNYA

Jawab:

3. JELASKAN DENGAN KATA-KATAMU APA YANG DIMAKSUD DENGAN FUNGSI LINIER

Jawab:

4. BERIKAN SATU CONTOH FUNGSI LINIER DAN GAMBARKAN GRAFIKNYA

Jawab:

INVESTIGASI

video animasi Fungsi linier

Fungsi linier dengan Desmos grafik

INVESTIGASI

video animasi Fungsi kuadrat

Fungsi kuadrat dengan Desmos grafik

5. JELASKAN DENGAN KATA-KATAMU APA YANG DIMAKSUD DENGAN FUNGSI KUADRAT

Jawab:

6. BERIKAN SATU CONTOH FUNGSI KUADRAT DAN GAMBARKAN GRAFIKNYA

Jawab:

7. JELASKAN DENGAN KATA-KATAMU APA YANG DIMAKSUD DENGAN FUNGSI POLINOMIAL

Jawab:

8. BERIKAN SATU CONTOH FUNGSI POLINOMIAL

Jawab:

INVESTIGASI

video animasi Fungsi polinomial

Fungsi Polinomial dengan Desmos grafik

Mengingat kembali aturan turunan

INVESTIGASI

Seorang mahasiswa Teknik Sipil sedang duduk di ruang kuliah dengan memegang buku kalkulus di tangannya. Ia mengingat kembali aturan dasar turunan yang baru dipelajari.

“Turunan fungsi konstan itu 0,” pikirnya, mengingat bagaimana fungsi konstan tidak berubah. Lalu, “Turunan dari f(x)=mx+n adalah m,” lanjutnya, mengingat fungsi linier dengan gradien tetap.
Ia juga mengingat rumus untuk turunan fungsi polinomial:

Setelah itu, ia teringat aturan rantai untuk turunan fungsi komposisi dan rumus turunan untuk fungsi trigonometri.

Dengan senyum kecil, mahasiswa tersebut merasa lebih siap untuk menyelesaikan soal kalkulus yang ada di depannya. Semua aturan itu, meski sederhana, sangat berguna dalam menganalisis struktur dan beban dalam teknik sipil.

1. **Apakah kalian masih ingat aturan turunan dari fungsi konstan?**
Jika $f(x) = k,$ dimana k adalah konstanta, maka $f'(x)$ adalah

Jawab:

2. **Apakah kalian masih ingat aturan turunan untuk fungsi berbentuk**
$f(x) = ax^n$?, dimana a dan n adalah konstanta. Tentukan hasil dari $f'(x)$!

Jawab:

Mengingat kembali variabel, koefisien dan konstanta

INVESTIGASI

Dinda, mahasiswa teknik sipil, sedang mengerjakan tugas tentang momen lentur jembatan. Ia bingung membedakan variabel, konstanta, dan koefisien dalam persamaan. Budi menjelaskan, "Variabel, seperti x, adalah nilai yang berubah-ubah, misalnya posisi sepanjang jembatan.

Konstanta, seperti panjang total jembatan L, adalah nilai yang tetap.

Koefisien, seperti b dalam persamaan M(x)=bx, menunjukkan besarnya pengaruh variabel terhadap hasil."

Dengan penjelasan ini, Dinda memahami bahwa variabel berubah, konstanta tetap, dan koefisien memperkuat peran variabel dalam persamaan.

EKSPLORASI 1

Identifikasikan variabel, koefisien variabel, dan konstanta dari masing-masing fungsi yang diberikan di bawah ini.

Fungsi konstan

1. $g(a) = -\frac{3}{4}$

   Variabel:

   Konstanta:

2. $h(k) = \sqrt{a}$

   Variabel:

   Konstanta:

3. $r(\theta) = 2^{-b}$

   Variabel:

   Konstanta:

Fungsi linier

1. $f(x) = x$

   Variabel:

   Konstanta:

   Koefisien Variabel:

2. $h(a) = a - 7x$

   Variabel:

   Konstanta:

   Koefisien Variabel:

Fungsi Polinomial

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax + b$

   Variabel:

   Konstanta:

   Koefisien Variabel:

Fungsi komposisi

1. $f(x) = (x + a)^2$

   Variabel:

   Konstanta:

   Koefisien Variabel:

Fungsi Trigonometri

1. $f(x) = 2sinx + 3$

   Variabel:

   Konstanta:

2. $I(t) = t - 5cosx$

   Variabel:

   Konstanta:

EKSPLORASI 2

Hitunglah turunan setiap fungsi di bawah ini .

Fungsi konstan

1. $g(a) = -\frac{3}{4}$

   $\frac{dg(a)}{da} =$

2. $h(k) = \sqrt{a}$

   $\frac{dh(k)}{dk} =$

3. $r(\theta) = 2^{-b}$

   $\frac{dr(\theta)}{d\theta} =$

Fungsi linier

1. $f(x) = x$

   $\frac{df(x)}{dx} =$

2. $h(a) = a - 7x$

   $\frac{dh(a)}{da} =$

Fungsi Polinomial

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax + b \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} =$

Fungsi komposisi

1. $f(x) = (x + a)^2 \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} =$

Fungsi Trigonometri

1. $f(x) = 2sinx + 3$

   $\frac{df(x)}{dx} =$

2. $I(t) = t - 5cosx$

   $\frac{dI(t)}{dt} =$

KONSEPTUALISASI

Untuk setiap fungsi di bawah ini, rumuskan turunan menggunakan aturan dasar turunan yang sesuai

Fungsi konstan

$f(x) = k \Rightarrow f'(x) =$

Fungsi linier

$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) =$

Fungsi Polinomial

$f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) =$

Fungsi komposisi

$f(x) = a(g(x))^n \Rightarrow f'(x) =$

Fungsi Trigonometri

$f(x) = asinbx \Rightarrow f'(x) =$

$f(x) = acosbx \Rightarrow f'(x) =$

Catatan:
Pastikan Anda memahami setiap aturan dasar turunan yang digunakan pada masing-masing fungsi. Setelah selesai, diskusikan jawaban Anda dengan teman atau tinjau kembali investigasi materi mengingat kembali turunan untuk memastikan kebenaran hasil perhitungan Anda.

VERIFIKASI

Perhatikan fungsi berikut

$$h(t) = 5t^2 - \frac{3}{\omega^2}t + \omega^5$$

1.Sebutkan variabel dari fungsi	Jawab: Variabel dari fungsi tersebut adalah...
2. Tentukan aturan dasar turunan mana saja yang dapat digunakan untuk mencari turunan Pertama fungsi	Ceklist aturan yang sesuai ☐ Aturan dasar turunan fungsi konstan ☐ Aturan dasar turunan fungsi linier ☐ Aturan dasar turunan fungsi Polinomial ☐ Aturan dasar turunan fungsi Komposisi ☐ Aturan dasar turunan fungsi Trigonometri
3. Periksa apakah rumus yang dipilih sudah benar? Gunakan rumus yang sudah dipilih untuk mencari turunan Pertama fungsi.	Turunan pertama fungsi, yaitu $\frac{dh(t)}{dt} =$

IMPLEMENTASI

Tentukan turunan pertama dari fungsi berikut ini:

1. Jika $r(\theta) = 3\theta - a, a \in Z$, maka $r'(\theta) =$

2. Jika $\omega(t) = \sqrt{(3t^2 - t + c)^3}, c \in Z$, maka $\frac{d\omega}{dt} =$

2

TUJUAN PEMBELAJARAN

MAHASISWA DAPAT MENDEFINISIKAN SUATU FUNGSI DENGAN MENGETAHUI TURUNAN DARI FUNGSI TERSEBUT

MEMECAHKAN KODE AWAL

Apakah kamu sudah memahami aturan turunan dan penggunaannya?

Jika sudah memahaminya, maka lanjutkan ke bagian eksplorasi berikut. Jika masih belum memahaminya, sila untuk investigasi kembali video mengenai aturan turunan dengan cara scan barcode di samping ini!

INVESTIGASI

Video animasi aturan turunan & bukti

EKSPLORASI

Tentukan fungsi asal dari bentuk fungsi yang telah diketahui turunannya di bawah ini. Anda boleh memberikan lebih dari satu kemungkinan fungsi asal jika relevan

1. Jika $g'(a) = 0$ maka $g(a) =$

EKSPLORASI

2. Jika $h'(y) = x$ maka $h(y) =$

3. Jika $f'(x) = 3x^2$ maka $f(x) =$

4. Jika $r'(y) = xy + z$ maka $r(y) =$

5. Jika $v'(x) = 4\theta x^3 - \theta$ maka $v(x) =$

6. Jika $f'(x) = 2\sin x$ maka $f(x) =$

KONSEPTUALISASI

Tentukan fungsi asal dari bentuk fungsi yang telah diketahui turunannya di bawah ini. Anda boleh memberikan lebih dari satu kemungkinan fungsi asal jika relevan

1. Jika $f'(x) = 0$, maka bentuk umum fungsi asal $f(x) =$

Jawab:

2. Jika $f'(x) = k$, maka bentuk umum fungsi asal $f(x) =$

Jawab:

③ Jika $f'(x) = ax^r$, maka bentuk umum fungsi asal $f(x) =$

Jawab:

Syarat yang harus dipenuhi adalah

④ Jika $f'(x) = k\sin ax$, maka bentuk umum fungsi asal $f(x) =$

Jawab:

⑤ Jika $f'(x) = k\cos ax$, maka bentuk umum fungsi asal $f(x) =$

Jawab:

VERIFIKASI

Buktikan aturan pencarian fungsi asal untuk setiap kasus berikut. Tunjukkan langkah-langkah dan pembuktian bahwa fungsi asal yang diperoleh benar sesuai dengan turunan yang diberikan.

① Jika $f'(x) = 0$, buktikan apakah benar bahwa fungsi asalnya $f(x) = C$? untuk suatu $C \in \mathbb{R}$

Jawab:

② Jika $f'(x) = k$, buktikan apakah benar bahwa fungsi asalnya $f(x) = kx + C$? untuk suatu $C \in \mathbb{R}$

Jawab:

3. Jika $f'(x) = ax^r$, buktikan apakah benar bahwa fungsi asalnya

$$f(x) = \frac{a}{r+1}x^{r+1} + C\,,$$

untuk suatu $r \neq -1$? untuk suatu $C \in \mathbb{R}$

Jawab:

4. Jika $f'(x) = k\sin ax$, buktikan apakah benar bahwa fungsi asalnya $f(x) = -\frac{k}{a}\cos ax + C$

Jawab:

5. Jika $f'(x) = k\cos ax$, buktikan apakah benar bahwa fungsi asalnya $f(x) = \frac{k}{a}\sin ax + C$? untuk suatu $C \in \mathbb{R}$.

Jawab:

IMPLEMENTASI

1. **Tentukan fungsi asal dari setiap fungsi yang sudah diketahui turunan pertamanya sebagai berikut:**

1. Jika $f'(x) = 2$ maka $f(x) =$
2. Jika $I'(a) = -k$, maka $I(a) =$
3. Jika $g'(h) = \frac{1}{3}a$, maka $g(h) =$
4. Jika $r'(\theta) = 2^h$, maka $r(\theta) =$
5. Jika $\alpha'(x) = \beta$, maka $\alpha(x) =$
6. Jika $D_x(h) = 1$, maka $h(x) =$
7. Jika $D_y(k) = -\frac{a}{6}$, maka $k(y) =$
8. Jika $D_r(f) = \sqrt{k}$, maka $f(r) =$
9. Jika $D_a(b) = d$, maka $b(a) =$
10. Jika $D_\delta(\varepsilon) = -\frac{a+b}{c+d}$, maka $\varepsilon(\delta) =$

IMPLEMENTASI

2 Tentukan Antiderivative dari fungsi berikut

1. $f'(x) = x$
2. $g'(x) = 2x$
3. $h'(x) = -\frac{1}{3}x$
4. $r'(x) = \sqrt{x}$
5. $I'(x) = \frac{3}{x^5}$
6. $I'(r) = r^{-\frac{3}{2}}$
7. $y'(k) = \frac{3}{4}k\sqrt{k}$
8. $\omega'(t) = \frac{-4}{5x^7}$
9. $\Delta'(h) = \frac{\sqrt{2h}}{h}$

3 Tentukan fungsi asal yang mungkin dari setiap turunan fungsi berikut ini

1. $\frac{df(x)}{dx} = x + 1$
2. $\frac{dg(x)}{dx} = -x^2 + a$
3. $\frac{dh(x)}{dx} = \frac{2}{3}kx^6 - x + k$
4. $\frac{dk(x)}{dx} = 2x\sqrt{x} - kx$
5. $\frac{dT(x)}{dx} = t^7 - 10^{-3}x + tx^3$
6. $\frac{df(y)}{dy} = yx - y$
7. $\frac{dg(a)}{da} = -ax^2 + a^5$
8. $\frac{dh(t)}{dt} = \frac{3}{t^6} - at + t^6$
9. $\frac{dk(i)}{di} = 1 - 2i\sqrt{t} + i^{\frac{3}{4}}$
10. $\frac{dT(r)}{dr} = \frac{1-2r+r^3}{\sqrt{r}}$

4 Tentukan fungsi asal dari fungsi komposisi berikut ini

1. $f'(x) = (x + a)^3$
2. $g'(x) = \sqrt{x - 4}$
3. $h'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$
4. $r'(x) = (x - k)\sqrt{x - k}$
5. $t'(x) = \frac{1}{(x+5)\sqrt{x+5}}$
6. $v'(x) = \frac{(x-r)^7}{\sqrt{x-r}}$

5 Tentukan fungsi asal dari fungsi trigonometri berikut ini

1. $f'(x) = -sinx$
2. $g'(x) = cos2x$
3. $k'(x) = 3sin3x$
4. $I'(x) = -3^a cosax$
5. $y'(x) = -\frac{1}{2}kcosx$
6. $I'(t) = tsin\,x - \cos t$
7. $\omega'(a) = a^2 - \mathrm{b}\sin a + b^2$
8. $\alpha(x) = k\sqrt{x} - k + 2sinkx$
9. $\Delta'(h) = h\sin t + tsin\,h$
10. $\delta(r) = r^{-2} - 2\sin r + 2r\cos 2$

3

TUJUAN PEMBELAJARAN

MAHASISWA MENGETAHUI ISTILAH DAN SYMBOL INTEGRAL TAK TENTU

MEMECAHKAN KODE AWAL

Apakah definisi dari Integral tak tentu?

INVESTIGASI

Jika f adalah suatu fungsi yang meemnuhi $F'(x) = f(x)$ pada interval tertentu pada sumbu x, maka $F(x)$ disebut antiderivative atau Integral tak tentu dari $f(x)$, dan dituliskan sebagai

$$F(x) = \int f(x)\ dx \quad (1)$$

Ini berarti bahwa $F'(x) = f(x)$ pada interval I adalah sebuah tautologi yang sejalan dengan

$$\int f'(x)\ dx = f(x) \quad (2)$$

Salah satu cara untuk mengevaluasi suatu integral tertentu pada suatu interval adalah dengan mencari dan mengevaluasi *antiderivative* F.

Sering kali, bentuk dari

$$\int f(x)\, dx\ = F(x) + C \quad (3)$$

menyatakan notasi dari semua integral tak tentu yang mungkin dari fungsi f atau bentuk umum integral tak tentu.

Di sini, $f(x)$ disebut sebagai "integran" atau fungsi yang diintegralkan, dengan x sebagai variabel integrasi, $F(x)$ sebagai integral tak tentu dari $f(x)$, dan konstanta C disebut sebagai konstanta integrasi, di mana $C \in R$.

Sifat invers dari integrasi dan diferensiasi dapat diverifikasi dengan melakukan substitusi $F'(x)$ untuk $f(x)$ dalam definisi integral tak tentu (3), sehingga diperoleh

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C \quad (4)$$

Dari persamaan (4) terlihat bahwa integrasi adalah invers dari differensiasi. Terlebih lagi, berdasarkan persamaan (3), maka diperoleh

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x) \quad (5)$$

Dari persamaan (5) terlihat bahwa differensiasi adalah invers dari integrasi.

"$\int$"

contoh:

$$\int 0\ dx = C$$

$$\int 1\ dx = x + C$$

$$\int x\ dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

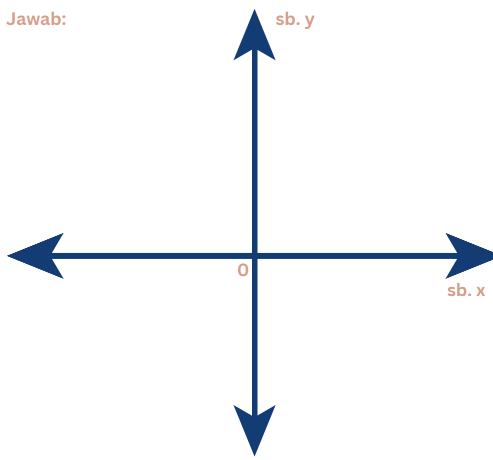
EKSPLORASI

Diketahui

$$f'(x) = 2x$$

Jelajahi berbagai kemungkinan yang dapat dihasilkan dari fungsi asalnya dengan menjawab pertanyaan berikut:

EKSPLORASI

Nyatakan $f(x)$ sebagai fungsi asal dalam bentuk integral!	Jawab:
Tentukan hasil integralnya!	Jawab:
Tentukan tiga kemungkinan bentuk fungsi asal $f(x)$ dengan menggunakan tiga konstanta berbeda	Jawab: 1 2 3
Gambarkan tiga fungsi asal yang diperoleh dalam satu bidang koordinat	Jawab: 

INVESTIGASI

Jika mengalami kesulitan dalam membuat grafik, silakan melakukan investigasi dengan menggunakan grafik Desmos di samping!

Grafik fungsi

KONSEPTUALISASI

Rumuskan aturan dasar integral tak tentu untuk setiap bentuk berikut

1. $\int k dx =$

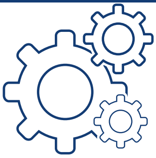
2. $\int a x^r dx =$

3. $\int k \cos ax dx =$

4. $\int k \sin ax dx =$

VERIFIKASI

Periksalah kebenaran aturan dasar integral tak tentu berikut dengan cermat. Pastikan setiap langkah integrasi yang digunakan sesuai dengan aturan yang berlaku:



1. $\int k dx = kx + C$

Jawab:

② $$\int ax^r dx = \frac{a}{r+1} x^{r+1} + C$$

Jawab:

③ $$\int k \cos ax dx = \frac{k}{a} \sin ax + C$$

Jawab:

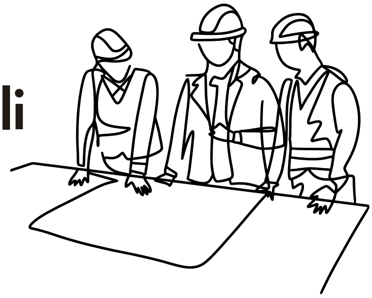
④ $$\int k \cos ax dx = \frac{k}{a} \sin ax + C$$

Jawab:

Catatan: Jelaskan proses pengecekanmu dan berikan alasan matematis untuk menyatakan apakah aturan tersebut benar atau memerlukan koreksi!

MEMECAHKAN KODE AWAL

Dapatkah kamu menuliskan kembali aturan integral tak tentu yang sudah diverifikasi?



Jika sudah dapat menuliskan kembali rumus-rumus yang telah diverifikasi sebelumnya, silahkan lanjut ke bagian eksplorasi. Jika belum bisa, silahkan untuk kembali ke halaman sebelumnya. Pastikan penulisanmu mencakup setiap aturan dengan jelas dan lengkap. Gunakan pemahaman dari diskusi untuk menjelaskan bagaimana rumus tersebut digunakan dalam konteks integral tak tentu

EKSPLORASI

Gunakan aturan dasar integral untuk menyelesaikan setiap masalah berikut

1. $\frac{dy}{dx} = 3 \rightarrow y =$

2. $f'(x) = x \rightarrow f(x) =$

3. $\frac{dI}{d\theta} = \sqrt{\theta} \rightarrow I(\theta) =$

INVESTIGASI

Merubah bentuk akar ke bilangan pangkat $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{n}{m}}$

INVESTIGASI

Merubah bentuk abilangan berpangkat bulat negatif $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

4. $\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x^5} \rightarrow f(x) =$

5. $\omega'(\theta) = 3cos9\theta \rightarrow \omega(\theta) =$

INVESTIGASI

Menghitung bilangan pecahan

Jika mengalami kesulitan dalam menghitung bilangan pecahan, silakan melakukan investigasi dengan menggunakan *grasphablemath* dengan scan barcode di atas!

KONSEPTUALISASI

Selamat mengerjakan soal berikut! Gunakan aturan dasar integral untuk menyelesaikan setiap masalah yang diberikan. Ingatlah bahwa setiap hasil akhir Anda harus memenuhi kondisi tertentu yang tercantum dalam soal.

Tuliskan langkah-langkah penyelesaian Anda secara rinci dan sistematis. Pastikan setiap langkah yang Anda tulis sesuai dengan aturan integral dasar yang telah dipelajari. Pemahaman dan ketelitian dalam menyusun solusi akan menjadi fokus utama dari evaluasi.

1. Diketahui $\frac{dy}{dx} = 3$, temukan y jika $y(0) = 5$

Jawab:

2. Diketahui $f'(x) = x$, temukan $f(x)$, jika $f(2) = 1$

Jawab:

3. Diketahui $\frac{dI}{d\theta} = \sqrt{\theta}$ temukan $I(\theta)$, jika pada saat $\theta = 9$, fungsi I bernilai -2

Jawab:

4. Diketahui $\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x^5}$, temukan fungsi $f(x)$ yang memenuhi $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

Jawab:

5. Diketahui $\omega'(\theta) = 3\cos 9\,\theta$, temukan $\omega(\theta)$ jika untuk $\theta = \frac{\pi}{2}$, fungsi ω bernilai 1.

Jawab:

VERIFIKASI

Langkah berikutnya adalah membuktikan kebenaran hasil yang telah Anda temukan. Periksa apakah fungsi asal yang Anda temukan, beserta konstanta integralnya, memenuhi kondisi awal yang telah diberikan dalam setiap soal.

Gunakan aturan turunan fungsi dan metode substitusi untuk memvalidasi hasil tersebut. Pastikan setiap langkah analisis dijelaskan dengan jelas dan logis sehingga hasil yang diperoleh dapat dipertanggungjawabkan. Diskusikan pula jika ada ketidaksesuaian antara hasil dan kondisi awal, serta identifikasi kemungkinan sumber kesalahan

VERIFIKASI

1 Periksa apakah solusi yang ditemukan memenuhi kondisi $\frac{dy}{dx} = 3$ dan $y(0) = 5$	Jawab:
2 Periksa apakah solusi yang ditemukan memenuhi kondisi $f'(x) = x$ dan $f(2) = 1$	Jawab:
3 Periksa apakah solusi yang ditemukan memenuhi kondisi $\frac{dI}{d\theta} = \sqrt{\theta}$ dan $I(9) = -2$	Jawab:
4 Periksa apakah solusi yang ditemukan memenuhi kondisi $\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x^5}$ dan $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$	Jawab:
5 Periksa apakah solusi yang ditemukan memenuhi kondisi $\omega'(\theta) = 3\cos 9\,\theta$ dan $\omega\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$	Jawab:

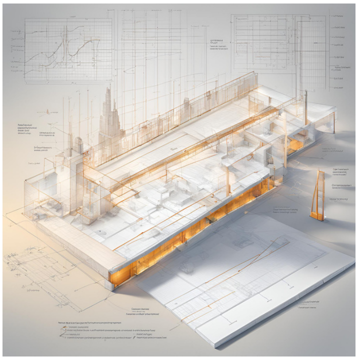
5

TUJUAN PEMBELAJARAN

MAHASISWA DAPAT MENGHITUNG INTEGRAL TAK TENTU DENGAN MENGGUNAKAN SIFAT KELINIERAN INTEGRAL

MEMECAHKAN KODE AWAL

Tahukah kamu mengapa sifat kelinieran integral tak tentu penting dalam teknik sipil?



Sifat kelinieran integral adalah salah satu prinsip fundamental yang mempermudah proses integrasi. Prinsip ini memungkinkan penyederhanaan operasi integral dengan membagi fungsi menjadi bagian-bagian lebih kecil atau dengan mengeluarkan konstanta dari operasi integral. Dalam implementasinya, konsep ini sangat berguna untuk menganalisis distribusi beban, menentukan momen lentur, dan menghitung defleksi pada struktur. Melalui aktivitas pembelajaran, mahasiswa diajak untuk memahami dan menerapkan sifat kelinieran integral secara langsung dalam berbagai masalah teknik sipil. Pemahaman mendalam terhadap konsep ini akan membantu mahasiswa menyelesaikan integral dengan lebih efektif, sistematis, dan relevan terhadap desain dan analisis struktur.

EKSPLORASI

Hitunglah integral tak tentu berikut!

Kemudian, tinjau apakah terdapat perbedaan atau persamaan dalam kedua hasil, serta berikan penjelasan singkat mengenai apa yang membuat hasilnya serupa atau berbeda.

1) $\int 3dx =$

2) $3\int dx =$

Jawab:

3) $\int 6xdx =$

4) $6\int xdx =$

Jawab:

5) $\int (3x^2 + 5x^2)dx =$

6) $\int (3x^2)dx + \int (5x^2)dx =$

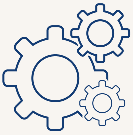
Jawab:

7) $\int (2x+5)(x-1)dx =$

8) $(\int (2x+5)dx)(\int (x-1)dx) =$

Jawab:

KONSEPTUALISASI



Berdasarkan pemahaman Anda dari aktivitas eksplorasi, Hitunglah integral di bawah ini kemudian gunakan temuan Anda untuk merumuskan sifat-sifatnya.

Misalkan $F(x)$ adalah *antiderivative* dari $f(x)$ sedemikian sehingga $F'(x) = f(x)$ dan $G(x)$ adalah *antiderivative* dari $g(x)$ sedemikian sehingga $G'(x) = g(x)$

Sifat ke-1

$\int k dx =$	$k \int dx =$

Sifat ke-2

$\int kf(x) dx =$	$k \int f(x) dx =$

Sifat ke-3

$\int (f(x) + g(x)) dx =$	$\int f(x) dx + \int g(x) dx =$

Sifat ke-4

$\int (f(x) - g(x)) dx =$	$\int f(x) dx - \int g(x) dx =$

Kesimpulan: Diperoleh sifat-sifat kelinieran integral sebagai berikut.

1. ______________________
2. ______________________
3. ______________________
4. ______________________

VERIFIKASI

Verifikasilah pengetahuan yang telah Anda peroleh pada konseptualisasi dengan menyelesaikan permasalahan berikut menggunakan sifat kelinieran integral. Pastikan setiap langkah perhitungan dijelaskan secara rinci untuk menunjukkan penerapan sifat tersebut

Diketahui $f(x) = 2x - 3$ dan $g(x) = x^2$.

1) $4\int f(x)dx =$	**2)** $\int 4f(x)dx =$

verifikasi apakah hasilnya sama?

3) $\int (f(x) + g(x))dx =$	**4)** $\int f(x)dx + \int g(x)dx =$

verifikasi apakah hasilnya sama?

5) $\int (f(x) - g(x))dx =$	**6)** $\int f(x)dx - \int g(x)dx =$

Jawab:

Setelah memahami konsep integral tak tentu, aturan dasar integral, dan sifat kelinieran integral, langkah berikutnya adalah mengerjakan soal-soal yang relevan untuk mengintegrasikan ketiga pemahaman tersebut.
Latihan ini dirancang untuk membantu mahasiswa menghubungkan teori dengan aplikasi matematis yang sering ditemui dalam analisis teknik sipil, seperti menghitung luas, momen, atau distribusi beban. Dengan menyelesaikan soal-soal ini, mahasiswa dapat memperkuat konsep yang telah dipelajari sekaligus mempersiapkan diri untuk penerapan lebih lanjut dalam konteks teknik sipil.

IMPLEMENTASI

1 Selesaikan integral berikut dengan menggunakan rumus dasar

1. $\int x\,dx$
2. $\int -3x\,dx$
3. $\int -\frac{1}{4}x\,dx$
4. $\int 2\sqrt{x}\,dx$
5. $\int \frac{5}{x^6}dx$
6. $\int r^{-\frac{3}{4}}dr$
7. $\int r^{-\frac{3}{4}}dr$
8. $\int \frac{2}{3}k\sqrt{k}\,dk$
9. $\int \frac{-4}{5t^7}dt$
10. $\int \frac{\sqrt{2h}}{h^2}dh$
11. $\int \frac{a^2b}{\sqrt{a}}da$

2 Hitunglah dengan menggunakan sifat kelinieran integral

1. $\int (x+2)\ dx$
2. $\int (2x^3+y)\ dx$
3. $\int (kx^5-3x+k^2)\ dx$
4. $\int (-\frac{1}{2}x\sqrt{x}-\frac{k}{3}x)\ dx$
5. $\int (t^7-10^{-3}x+tx^3)\ dt$
6. $\int (yx-y)\ dy$
7. $\int (ax+b)^2\,da$
8. $\int \left(\frac{m}{t^3}-mt+t^3\right)dt$
9. $\int \left(2-2i\sqrt{j}+i^{\frac{2}{3}}\right)di$
10. $\int \left(\frac{1-2r+r^3}{\sqrt{r}}\right)dr$

3 Tentukan fungsi awal yang memenuhi nilai awal berikut ini!

1. $\frac{dy}{dx}=-2, y(0)=1$
2. $\frac{dx}{dy}=3, y(1)=0$
3. $\frac{dh}{dt}=4t^2, h(2)=10$
4. $\frac{dr}{d\theta}=\theta\sqrt{\theta}, r(1)=3$
5. $I'(r)=\frac{3}{r^3}, r(-2)=1$
6. $t'(x)=2x(1-x), t(1)=5$
7. $v'(a)=(ab+b)^2, v(0)=-1$
8. $y'(x)=3sinx, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

4 Tentukan hasil integral berikut ini!

1. $\int 2(x+a)da$
2. $\int x^3(2k-x)dx$
3. $\int (x+y)dx\ +\int (x-y)dx$
4. $\int (3k-m)dm\ -\int (k-2m)dm$
5. $\int (a+b)(a-b)db$
6. $\int xy^2(2x+y)^2dx$
7. $(\int 3\sqrt{r}dr)(\int (1-r^2)dr)$
8. $\left(\int -\frac{1}{\theta\sqrt{\theta}}d\theta\right)\left(\int (\theta^3\sqrt{\theta})d\theta\right)$

34

6

TUJUAN PEMBELAJARAN

MAHASISWA DAPAT MENGHITUNG TEKNIK INTEGRASI SUBSTITUSI DAN PARSIAL.

MEMECAHKAN KODE AWAL

Masih ingat konsep ekspansi aljabar?

Bagaimana itu membantu menyederhanakan fungsi sebelum integrasi?

Dalam menyelesaikan perhitungan integral, terdapat beberapa teknik integrasi yang sering digunakan, seperti teknik integrasi substitusi dan parsial. Kedua teknik ini menjadi alat penting dalam menganalisis distribusi beban dan dinamika struktur. Untuk mempermudah prosesnya, sering kali

digunakan ekspansi aljabar, seperti melengkapi kuadrat atau menyederhanakan fungsi kompleks menjadi bentuk yang lebih sederhana. Pendekatan ini membantu mahasiswa teknik sipil memahami dan menyelesaikan masalah matematika secara efektif, mendukung desain dan analisis struktur dengan lebih terarah.

EKSPLORASI 1

Selesaikan integral berikut dengan langkah-langkah yang jelas. Gunakan ekspansi aljabar untuk menyederhanakan fungsi sebelum melakukan integrasi jika diperlukan

1. $\int (2x+3)dx =$

2. $\int (2x+3)^2 dx =$

INVESTIGASI

Video animasi ekspansi aljabar

3. $\int (2x+3)^3 dx =$

KONSEPTUALISASI 1

Formulasikan teknik integrasi substitusi untuk integral berikut

$$\int f'(x)(f(x))^n dx$$

dengan mengikuti langkah-langkah berikut:

1. **Tentukan substitusi yang tepat untuk fungsi f(x) dalam integral**

Jawab:

2. Gantilah *dx* dengan ekspresi yang sesuai berdasarkan substitusi yang dipilih.

Jawab:

3. Selesaikan integral dalam variabel baru

Jawab:

4. Kembalikan hasil integral ke dalam variabel asal dan pastikan langkah-langkah perhitungannya benar.

Jawab:

VERIFIKASI 1

Setelah menyelesaikan integral ini, pastikan hasilnya sudah benar dan langkah-langkah perhitungannya sesuai. Selanjutnya, gunakan pemahaman yang telah Anda peroleh untuk menyelesaikan soal berikut

$$\int (2x+3)^{100} dx$$

Jawab:

EKSPLORASI 2

Selesaikan integral berikut dengan menggunakan teknik yang sesuai. Cobalah untuk menyederhanakan bentuk soal terlebih dahulu jika diperlukan

1. $\int x\,(2x+3)dx =$

2. $\int x\,(2x+3)^2 dx =$

3. $\int x(2x+3)^3 dx =$

KONSEPTUALISASI 2

Formulasikan teknik integrasi parsial berikut

$$\int udv = uv - \int vdu$$

dengan mengikuti langkah-langkah berikut:

1. **Tuliskan aturan turunan dari perkalian dua buah fungsi dalam variabel x**

Jawab:

$$\frac{d}{dx}(u.v) =$$

② **Integralkan kedua ruas dalam variabel x untuk mendapatkan u.v**

Jawab:

$u.v =$

③ **Formulasikan** $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Jawab:

VERIFIKASI 2

Setelah menyelesaikan integral ini, pastikan hasilnya sudah benar dan langkah-langkah perhitungannya sesuai. Selanjutnya, gunakan pemahaman yang telah Anda peroleh untuk menyelesaikan soal berikut

$$\int x(2x+3)^{100}\,dx$$

Jawab:

Dalam integrasi parsial, langkah pertama adalah memilih mana yang menjadi *u* dan *dv*. Pilih *u* sebagai fungsi yang mudah diturunkan dan *dv* sebagai bagian yang mudah diintegralkan. Aturan LIATE (dari kiri ke kanan) berikut membantu mempermudah pemilihan *u*.

L Logaritma **I** Invers Trigonometri **A** Aljabar **T** Trigonometri **E** Eksponen

IMPLEMENTASI

1 Selesaikan integral berikut!

1. $\int (x-12)^6 dx =$
2. $\int (8\alpha+5)^3 d\alpha =$
3. $\int 12(12y+24)^2 dy =$
4. $\int p(2p^2+6)^9 dp =$
5. $\int 15m^2(5m^3-1)^4 dm =$
6. $\int (6t^2+2t)(2t^3+t^2-5)^{11} dt =$
7. $\int (2k^3-1)(3k^4-6k+4)^5 dk =$
8. $\int (q+10)^{-3} dq =$
9. $\int \frac{1}{z-1} dz =$
10. $\int \frac{1}{(x+9)^5} dx =$

2 Hitunglah nilai dari integral berikut ini!

1. $\int 2\sqrt{2\rho}\, d\rho =$
2. $\int \sqrt{5x}\, dx =$
3. $\int k\sqrt{3-k^2}\, dk =$
4. $\int 3p^2\sqrt{p^3+5}\, dp =$
5. $\int (x^2+2x)\sqrt{x^3+3x^2-4}\, dx =$
6. $\int \sin y\sqrt{\cos y}\, dy =$
7. $\int \frac{\sin y+\cos y}{\cos y} dy =$
8. $\int \frac{\cos(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} dz =$
9. $\int t\sin(2t^2) dt =$
10. $\int \frac{\cos(2z+3)}{1-\cos^2(2z+3)} dz =$

3 Tentukan hasil dari integral berikut!

1. $\int (y-5)\sqrt{y-5}\, dy$
2. $\int (2x(x^2-5)\sqrt{x^2-5}) dx =$
3. $\int \frac{dt}{\sqrt{11t}} =$
4. $\int \frac{4}{\sqrt{3p+2}} dp =$
5. $\int \sqrt{\frac{25}{2q}}\, dq =$
6. $\int \frac{8z^3}{\sqrt{6z^4}} dz =$
7. $\int \frac{2}{(2x+5)^2} dx =$
8. $\int \frac{q}{4q^2+2} dq =$
9. $\int \frac{2k-k^2}{\sqrt{4k^3-12k^2-10}} dk =$
10. $\int \frac{4\theta^3}{(8-2\theta^4)^{\frac{3}{2}}} d\theta =$

4 Selesaikan integral berikut dengan menggunakan teknik integrasi parsial!

1. $\int \alpha(\alpha+5)^5 d\alpha =$
2. $\int y(5-y)^{10} dy =$
3. $\int \rho(3\rho-3)^4 d\rho =$
4. $\int 3y(10+2y)^{\frac{3}{2}} dy =$
5. $\int \frac{\phi}{(3+2\phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi =$
6. $\int y^2\sin(2y) dy =$
7. $\int x\cos 10x\, dx =$
8. $\int t^2\cos t\, dt =$
9. $\int 2p\cos p\, dp =$
10. $\int z\sin z\cos z\, dz =$

IMPLEMENTASI 1

Analisis Mekanika Bahan 1

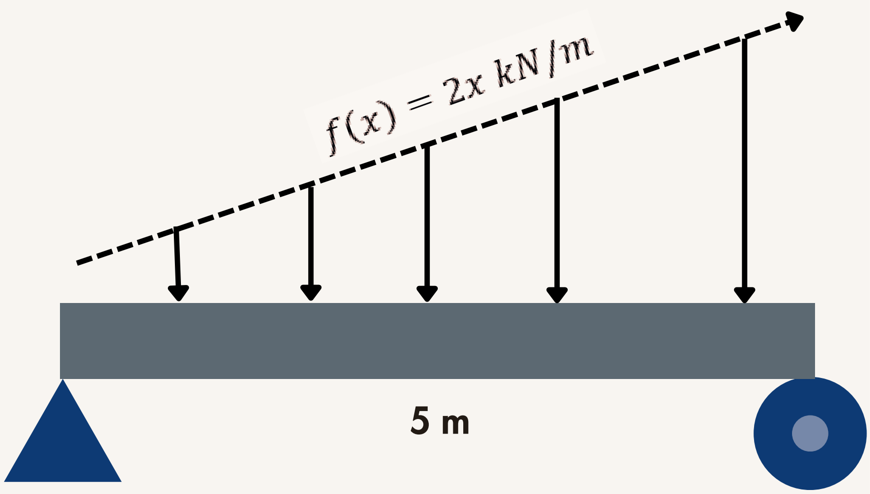
Penggunaan rumus dasar integral tak tentu

Sebuah balok horizontal sepanjang 5m dipasang pada tumpuan sederhana di ujung-ujungnya.

INVESTIGASI

Animasi ilustrasi masalah

Gaya distribusi beban bervariasi bekerja di sepanjang balok, dengan besarnya gaya distribusi dinyatakan sebagai fungsi $f(x) = 2x\ kN/m$



TENTUKAN

1. Persamaan gaya internal F(x) di sepanjang balok

Jawab:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

2. Persamaan untuk defleksi y(x) pada titik-titik di sepanjang balok, dengan modulus elastisitas E dan momen inersia I dari balok adalah konstan. Persamaan defleksi

$$y(x) = \frac{1}{EI}\int M(x)dx$$

dengan $M(x) = \int F(x)dx$ merupakan momen lentur

Jawab:

3. Hitung nilai defleksi pada saat x = 3

Jawab:

4. Bagaimana distribusi beban yang bervariasi mempengaruhi distribusi gaya internal dan defleksi serta dampak dari modulus elastisitas dan momen inersia terhadap defleksi. Jelaskan!

Jawab:

IMPLEMENTASI 2

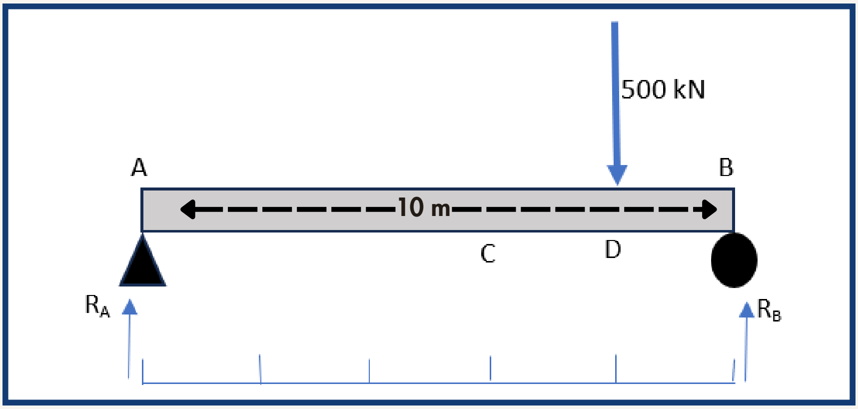
Analisis Mekanika Bahan 2

Perhitungan integral menggunakan sifat kelinieran integral

Diberikan sebuah gelagar memiliki Panjang 10m, diberikan beban 500kN di titik D seperti pada Gambar.

INVESTIGASI

Animasi ilustrasi masalah



TENTUKAN

1 Besar reaksi di titik A dan B

Jawab:

Keseimbangan gaya vertikal

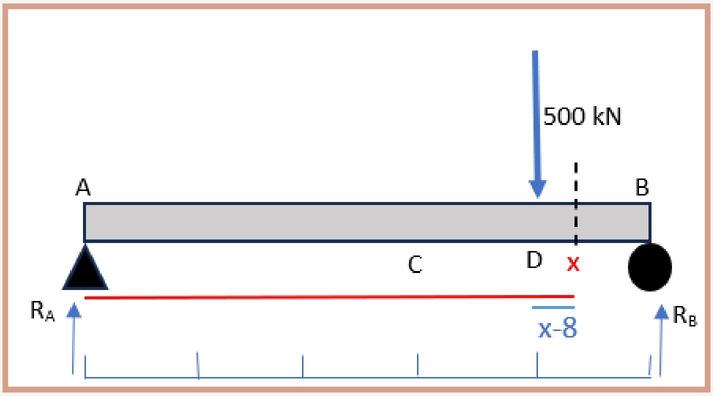
$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_A + R_B =$$

Keseimbangan momen di titik A

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 500 \times \cdots - \cdots \times R_B = 0$$

$$R_B = \cdots$$
$$R_A = \cdots$$

② Persamaan momen



Jawab:

Segmen 1 : A-D (hanya dipengaruhi gaya R_A)

$$M(x) = R_A . x = \cdots$$

Segmen 2: D-B (hanya dipengaruhi gaya R_A dan beban di D)

$$M(x) = R_A \times \cdots - \cdots\ (x - 8)$$

$$M(x) =$$

$$M(x) =$$

③ Menghitung lendutan di titik C, jika

Modus elastisitas $E = 200GPa = 200 \times 10^9\ N/m^2$

Momen inersia $I = 5 \times 10^{-6} m^4$

Jawab:

Persamaan lendutan: $\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \rightarrow \mathrm{EI}\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{M(x)}}$

Segmen 1:

$$\mathrm{EI}\frac{d^2y}{dx^2} = \cdots$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \int \cdots \quad dx$$

$$= \cdots \quad + C_1$$

$$EI.y = \int \cdots \quad dx$$

$$= \cdots \quad + C_2$$

Di titik A $(x = 0 \rightarrow y(0) = \cdots) \rightarrow C_2 = \cdots$

$$EI.y = \cdots$$

Segmen 2:

$$\mathrm{EI}\frac{d^2y}{dx^2} = \cdots$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \int \cdots \quad dx$$

$$= \cdots \quad + C_3$$

$$EI.y = \int \cdots \quad dx$$

$$= \cdots \quad + C_4$$

Di titik B $(x = 10 \rightarrow y(10) = 0)$

$$EI.y = \cdots$$

Untuk mencari nilai konstanta, gunakan kondisi slope kontinu di x=8,

1. Sudut kedua segmen sama

$\cdots \quad + C_1 \quad = \quad \cdots \quad + C_3$

Substitusi nilai x=8

2. Kondisi defleksi kontinu di x=8 harus sama

$\cdots \quad + C_2 \quad = \quad \cdots \quad + C_4$

Substitusi nilai x=8

Diperoleh, persamaan lendutan: $EI.y = \cdots$

4 Lendutan di x= 6

Jawab:

5 Lendutan di maksimum

Jawab:

Lendutan di maksimum di segmen 1, terjadi pada saat $EI\frac{dy}{dx} = 0$

IMPLEMENTASI 3

Analisis Mekanika Bahan 3

Perhitungan integral menggunakan teknik integrasi substitusi

Misalkan balok sederhana sepanjang 12m dengan beban terdistribusi bersesuaian dengan fungsi $f(x) = \sqrt{x+4}\ N/m$

INVESTIGASI

Animasi ilustrasi masalah

TENTUKAN

1. **Persamaan gaya geser** $V(x) = \int f(x)\ dx$

Jawab:

2. **Persamaan momen lentur** $y(x) = \int V(x)\ dx$

Jawab:

3. **Momen lentur di Tengah balok tersebut.**

Jawab:

4. tentukan kapasitas lentur balok, jika diketahui modus elastisitas (E)=200 GPa, kuat lentur σ_b = 250 MPa, dengan dimensi balok : lebar (b) = 0,3 m, tinggi (h) = 0,5 m dengan menggunakan rumus di samping kolom jawaban!

Jawab:

$I =$

$M_{maks} =$

Rumus momen inersia

$$I = \frac{b.h^3}{c}$$

c adalah jarak dari sumbu netral ke tepi, karena balok adalah penampang persegi Panjang, maka c adalah setengah dari tinggi balok

Rumus Kapasitas lentur

$$M_{maks} = \frac{\sigma_b.I}{c}$$

5. **Analisis apakah balok mengalami deformasi permanen? Kapan balok akan mengalami deformasi plastis atau kegagalan struktural?**

Jawab:

IMPLEMENTASI 4

Analisis Dinamika Struktur 1

Perhitungan integral menggunakan sifat kelinieran integral

Analisis rel kereta cepat Woosh

Misalkan sebuah jalur rel kereta Woosh sepanjang 50km mengikuti kemiringan tanah yang bervariasi, di mana kemiringan atau gradien rel dinyatakan dalam G(x)=0,001x + 0,01 dengan x adalah jarak dari titik awal jalur.

INVESTIGASI

Animasi ilustrasi masalah

TENTUKAN

1. **Fungsi ketinggian jalur dari titik awal rel** $h(x) = \int G(x)\ dx$

Jawab:

2 Ketinggian jalur segmen tengah dan ujung rel dari titik awal.

Jawab:

3 Jika massa kereta yang bergerak di atas rel adalah 500ton dan kereta bergerak dengan kecepatan konstan, tentukan bagaimana momen lentur yang dihasilkan akibat distribusi beban dinamis sepanjang jalur pada jarak 20km dan 50km.

Jawab:

$\omega(x) =$

$M(x) =$

Asumsikan distribusi beban

$$\omega(x) = \alpha h(x)$$

dengan $\alpha = 25\ ton/km$ yakni konstanta proporsionalitas (berat kereta/Panjang jalur)

Rumus Momen lentur

$$M(x) = \int \omega(x)\, dx$$

4 Analisis pengaruh momen lentur tersebut pada desain struktur rel

Jawab:

IMPLEMENTASI 5

Analisis Dinamika Struktur 2

Perhitungan integral menggunakan sifat kelinieran integral dan trigonometri

Analisis jalan tol cipularang km 92

Misalkan kemiringan jalan tol di sekitar KM 92 dinyatakan dengan gradien $G(x) = 0{,}01\ sin\left(\frac{\pi}{4}\right)x + 0{,}002x$

Dimana x adalah jarak dari titik awal segmen (km). Segmen ini memiliki Panjang 4km, dan sering terjadi kecelakaan karena gaya inersia yang tinggi yang bekerja pada kendaraan.

TENTUKAN

1. Ketinggian jalan pada berbagai titik di sepanjang segmen $h(x) = \int G(x)\ dx$

Jawab:

INVESTIGASI

Animasi ilustrasi masalah

2. Ketinggian jalur di akhir segmen

Jawab:

3. Gaya inersia di tengah dan akhir segmen yang bekerja pada sebuah truk dengan massa 10.000kg melaju di jalan menurun ini.

Jawab:

Rumus gaya inersia

$$F_i = m.g.sin\theta$$

Dengan m adalah massa kendaraan (kg), percepatan gravitasi $g = 9,8ms^{-2}$ adalah percepatan gravitasi dan θ adalah sudut kemiringan jalan dan meemnuhi

$$G(x) \approx tan\theta$$

4. Apa yang harus dilakukan pengendara truk untuk menghindari resiko kecelakaan pada segmen tengah atau akhir tersebut!

Jawab:

IMPLEMENTASI 6

Analisis Dinamika Struktur 3

Perhitungan integral parsial dan trigonometri

Analisis jembatan gantung 1

INVESTIGASI

Animasi ilustrasi masalah

Sebuah jembatan gantung berada di kawasan yang sering terkena angin kencang. Angin tersebut menyebabkan getaran osilasi pada kabel jembatan. Gaya angin yang bekerja pada kabel tersebut bervariasi sesuai dengan fungsi

$$f(t) = tsin(4t)$$

Dimana t adalah waktu dalam detik, dan 4 adalah frekuensi sudut dalam radian per detik.

TENTUKAN

1. **Fungsi gaya total yang bekerja pada kabel** $F(t) = \int f(t)dt$

Jawab:

2. **gaya total yang bekerja pada kabel jembatan selama 5 detik pertama.**

Jawab:

IMPLEMENTASI 7

Analisis Dinamika Struktur 4

Perhitungan integral trigonometri dalam kasus analisis respons dinamis jembatan gantung terhadap beban angin

Analisis jembatan gantung 2

Jembatan gantung dengan panjang total 400 m memiliki kabel utama yang membentang di atas jembatan. Beban angin yang mempengaruhi jembatan dapat dimodelkan dengan fungsi sinusoidal. Anggaplah beban angin ditentukan oleh intensitas beban k=500N/m dan Panjang jembatan L=400m

INVESTIGASI

Animasi ilustrasi masalah

TENTUKAN

1. **Fungsi beban angin yang bersesuaian dengan model** $f(x) = k.\,sin(\frac{2\pi x}{L})$

Jawab:

2. **Gaya elastis pada kabel** $E\,(x) = \int f\,(x)dx$

Jawab:

3 Buatkan gambar gaya elastis dengan bantuan desmos grafik calculator (abaikan C karena hanya akan meninjau perubahan gaya elastis relatif terhadap posisi x .

Jawab:

INVESTIGASI

Grafik Gaya elastis dengan Desmos grafik

4 Nilai maksimum dan minimum gaya elastis, dan posisi diperolehnya

Jawab:

5 Analisis kapasitas kabel yang aman untuk digunakan

Jawab:

kekuatan tarik material kabel

$$\sigma = 500 \times 10^6 N/m^2$$

Luas penampang kabel

$$A = \frac{T}{\sigma}$$

Dimana T adalah nilai gaya elastisitas maksimum.

IMPLEMENTASI MANDIRI

Tentukan fungsi asal dari setiap fungsi yang sudah diketahui turunan pertamanya sebagai berikut:

1. $r'(\phi) = 3^{\alpha+1}$
2. $D_x(y) = \dfrac{k^2}{5}$

Tentukan Antiderivative dari fungsi berikut

3. $h'(t) = \dfrac{1}{2}t^2\sqrt[3]{t}$
4. $z'(k) = \dfrac{\sqrt{12k}}{k^2}$

Tentukan fungsi asal yang mungkin dari setiap turunan fungsi berikut ini

5. $\dfrac{df(x)}{dx} = 2t^8 + 5x - \dfrac{2}{7}t^2\sqrt{x} + t + 2$
6. $\dfrac{dg(k)}{dk} = \dfrac{3k^2 + 10xk + 3}{x\sqrt{k}}$

Tentukan fungsi asal dari fungsi komposisi berikut ini

7. $y'(t) = \dfrac{3}{(x-t)\sqrt{x-t}}$
8. $v'(x) = \dfrac{(x+5)^{10}}{\sqrt[3]{(x+5)^2}}$

Tentukan fungsi asal dari fungsi trigonometri berikut ini

9. $k'(x) = -5t\sin\dfrac{1}{5}x$
10. $\alpha'(x) = x^3 + y^2\cos + x\sin y - y$

IMPLEMENTASI MANDIRI

Selesaikan integral berikut dengan menggunakan rumus dasar

11. $\int \frac{5ar\sqrt{r^2}}{\sqrt[3]{r}} dr$

12. $\int \frac{1}{x^{-\frac{4}{3}}} dx$

Selesaikan integral berikut dengan menggunakan rumus dasar

13. $\int (y^3\sqrt{b} - 2y^2 + by + 5b) dy$

14. $\int (pz + q)^{24} dz$

Tentukan fungsi awal yang memenuhi nilai awal berikut ini!

15. $\frac{dr}{d\theta} = \frac{3}{4}\theta^2, r(6) = 48$

16. $\frac{dg}{dx} = x^2(\frac{1}{3}x^3 + 1), g(1) = 1$

Tentukan hasil integral berikut ini!

17. $\int (x - y)(x - y) dy$

18. $\int \sqrt{x - a}\sqrt{x + a} dx$

IMPLEMENTASI MANDIRI

Hitunglah nilai dari integral berikut ini!

19. $\int (9t^2 - 2t)(-3t^3 + t^2 - 10)^8 dt =$

20. $\int \frac{1}{(x-y)^7} dx =$

21. $\int \frac{3\sin(\sqrt{5-2z})}{2\sqrt{5-2z}} dz =$

22. $\int (p^2 + 4p + 3)\sqrt{\frac{1}{3}p^3 + 2p^2 + 3pdp} =$

23. $\int (6-2y)\sqrt{6-2ydy}$

24. $\int \frac{xdt}{\sqrt{2xt}} =$

Selesaikan integral berikut dengan menggunakan teknik integrasi parsial!

25. $\int x \sin 5xdx =$

26. $\int yt^3 \cos tdt =$

27. $\int \rho(5\rho + 5x)^{15} d\rho =$

28. $\int 3p \sin pdp =$

IMPLEMENTASI MANDIRI

Selesaikan setiap masalah teknik sipil berikut ini!

29. Dalam perencanaan jalan raya di daerah perbukitan, kemiringan jalan (gradien) pada suatu ruas jalan dinyatakan sebagai fungsi turunan dari ketinggian terhadap jarak horizontal, yaitu:

$$\frac{dh}{dx} = 0,04x + 0,1$$

dengan x adalah jarak horizontal dalam kilometer dari titik awal jalan, dan dh/dx adalah kemiringan jalan.

a) Tentukan fungsi ketinggian h(x) dari jaln tersebut.

b) Jika ketinggian pada titik awal jalan (x=0) adalah 200m, tentukan ketinggian jalan pada jarak x=5 km dari titik awal.

30. Pada analisis struktur balok, distribusi beban w(x) pada suatu balok sepanjang 6m, dinyatakan sebagai $w(x) = 4 + 2x$ (dalam satuan kN/m) dengan x adalah posisi sepanjang balok (m) dari ujung kiri balok. Tentukan:

a) Gaya geser yang didefinisikan oleh

$$V(x) = -\int w(x)dx$$

b) Jika diketahui gaya geser di ujung kanan balok (x=6) adalah 0 kN, tentukan konstanta integrasi dan tuliskan fungsi lengkap V(x)

c) Berapa besar gaya geser pada posisi x=2 m?

31. Sebuah pondasi beton memiliki penampang melintang yang lebarnya bervariasi mengikuti fungsi:

$$b(x) = 1,5 + 0,2x$$

di mana x adalah tinggi dari dasar pondasi (dalam meter), dan tinggi total pondasi adalah 3 meter. Panjang pondasi tetap, yaitu 5 meter. Tentukan:

a) fungsi luas penampang melintang A(x)= b(x). 1 (asumsikan tinggi penampang tetap 1m)

b) Gunakan integral tak tentu untuk menentukan fungsi volume sebagian beton V(x)

c) Jika V(0)=0, tentukan volume beton dari dasar hingga tinggi x=3 m

Selesaikan setiap masalah teknik sipil berikut ini!

32. Gaya normal akibat tekanan tanah lateral pada dinding penahan diberikan oleh fungsi tekanan $\sigma(x) = 18x$ (dalam kN/ m^2) dengan x adalah kedalaman dari permukaan tanah (m). Tinggi dinding penahan adalah 4 m. Tentukan:
a) Gaya normal total N(x) yang bekerja sampai kedalaman x, dengan menggunakan integral tak tentu.
b) Jika pada kedalaman x=4m, maka besar total gaya normal yang bekerja?

33. Distribusi beban pada suatu balok sepanjang 5 meter dinyatakan sebagai:
$$w(x) = 2x^2 + 3x - 5$$
Tentukan:
a) Gaya geser: $V(x) = \int w(x)dx$

b)Momen lentur balok:
$$M(x) = \int V(x)dx$$
c) Jika M(0)=0, tentukan fungsi lengkap momen lentur pada balok

34. Sebuah platform kerja sementara untuk pengecoran berada di atas balok baja sederhana sepanjang 8 meter, ditumpu di kedua ujungnya. Platform tersebut menahan beban bervariasi yang berasal dari pekerja dan alat cor yang bergerak sepanjang balok. Distribusi beban dinyatakan sebagai:
$$w(x) = 6sin(\frac{\pi x}{8}) + x^2 \quad \text{(dalam kN/m)}$$
dengan x dalam meter dan x=0 adalah ujung kiri balok. Hitunglah
a) Gaya geser balok,
$$V(x) = -\int w(x)dx$$
b) Momen lentur balok:
$$M(x) = \int V(x)dx$$
c) Defleksi balok:
$$EI.\frac{d^2y}{dx^2} = -M(x)$$
Tentukan lokasi dan nilai defleksi maksimum, jika $EI = 120.000kN.m^2$

Selesaikan setiap masalah teknik sipil berikut ini!

35. Pada pembangunan jalan tol di daerah pegunungan, dinding penahan tanah dipasang di sisi lereng untuk mencegah longsoran. Tekanan tanah terhadap dinding penahan bervariasi sepanjang kedalaman dan dimodelkan oleh fungsi:

$$p\left(x\right) = 12x\sqrt{4 + x^2} \quad \text{(dalam kN/}m^2\text{)}$$

dengan x adalah kedalaman dari permukaan tanah (m). Tentukan:

a) Tekanan total yang dialami dinding hingga kedalaman x,

$$F\left(x\right) = \int p\left(x\right)dx$$

b) Jelaskan secara singkat arti fisik dari fungsi F(x) dalam konteks desain dinding penahan tanah jalan tol.

36. Sebuah balok horizontal sepanjang 6 meter menerima gaya berosilasi akibat mesin bergetar yang dipasang di atasnya. Gaya internal per satuan panjang pada posisi x meter dari ujung kiri balok dimodelkan dengan:

$$f\left(x\right) = x^2 cosx \qquad \text{(dalam kN/m)}$$

Tentukan:

a) Defleksi vertikal y(x) akibat gaya tersebut

$$y\left(x\right) = \int f\left(x\right)dx$$

b) Jelaskan secara singkat makna fisik dari fungsi y(x) tersebut dalam konteks desain balok struktur bangunan atau jembatan.

37. Sambungan vertikal di salah satu ujung jembatan layang menerima gaya non-linier akibat guncangan kendaraan yang lewat secara acak. Gaya per satuan panjang pada sambungan tersebut dimodelkan dengan fungsi:

$$R\left(x\right) = x^2 cos(3x)$$

dengan x adalah jarak (dalam meter) sepanjang sambungan, dan R(x) dalam satuan kN/m. Tentukan

a) Perpindahan vertikal kumulatif (misal, defleksi atau perpindahan geser) yang dialami sambungan akibat gaya yang diterima.

$$p\left(x\right) = \int R\left(x\right)dx$$

b) Diskusikan bagaimana informasi dari integral tersebut dapat membantu insinyur sipil dalam merancang elemen peredam getaran pada sambungan agar mengurangi deformasi yang berlebihan.

Edwin J. Purcell, dale Varberg, & Steven E.Rigdon. (2019). Calculus (9th ed., Vol. 1). Pearson Education, Inc.

Gere, J. M., Timoshenko, S. P., Hardani, W., & Suryoatmono, B. (2000). Mekanika bahan. Erlangga.

Ghorpade, S. R., & Limaye, B. V. (2006). A course in calculus and real analysis. Springer.

Hijab, O. (2007). Introduction to calculus and classical analysis. Springer.

Larson, R., & Edwards, B. H. (2022). Calculus of a single variable. Cengage Learning.

Lax, P. D., & Terrell, M. S. (2014). Calculus with applications. Springer.

Mendelson, E. (2022). Schaum's Outline of Calculus. McGraw-Hill Education.

Nurhayati, L., & Gunawan, I. (2022). Peningkatan Kemampuan Representasi Matematis Mahasiswa Teknik dengan Berbantuan Software Desmos Graphing Calculator. *PRISMA*, *11*(1), 255–264.

Nurhayati, L., Priatna, N., Herman, T., & Dasari, D. (2023). Learning Obstacle pada Materi Integral (Antiderivative) dalam Teori Situasi Didaktis. *Aksioma: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, *12*(1), 984. https://doi.org/10.24127/ajpm.v12i1.6470

Nurhayati, L., Suryadi, D., Dasari, D., & Herman, T. (2023). Integral (antiderivative) learning with APOS perspective: A case study. *Journal on Mathematics Education*, *14*(1), 129–148. https://doi.org/10.22342/jme.v14i1.pp129-148

Prabowo, A., Suryadi, D., & Dasari, D. (2021). Analysis of mathematical didactic situation constructed by prospective teachers based on learning trajectory. Journal of Physics: Conference Series, 1918(4). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1918/4/042051

Sholeh, M. N. (2021). Analisa Struktur SAP2000 v22. Pustaka Pranala.

Suryadi, D. (2013). Didactical design research (DDR) dalam pengembangan pembelajaran matematika. Prosiding Seminar Nasional Matematika Dan Pendidikan Matematika, 1, 3–12.

Suryadi, D. (2019a). Penelitian desain didaktis (ddr) dan implementasinya. Bandung: Gapura Press. Cet. Ke, 1.

Suryadi, D. (2019b). Pengetahuan transposisi sebagai konektor pendidikan akademik dan pendidikan profesi guru (PPG) matematika. In Semin. Acad. Lead. UPI 5 Sept. 2019.

Suryadi, D., Herman, T., Prabawanto, S., & Tin Lam, T. (2023). Students' Hypothetical Learning Trajectory (HLT) in Learning Fraction Division Calculation Operations.

Fungsi Komposisi	:	**Penggabungan dua atau lebih fungsi, di mana hasil dari satu fungsi menjadi input dari fungsi lainnya, yang menghasilkan suatu fungsi baru.**
Fungsi Konstan	:	**Fungsi dengan nilai tetap untuk setiap anggota domain.**
Fungsi Kuadrat	:	**Fungsi dengan bentuk umum $f(x) = ax^2 + bx + c$, di mana grafiknya berbentuk parabola.**
Fungsi Linier	:	**Fungsi dengan bentuk umum $f(x) = mx + c$, di mana grafiknya berupa garis lurus.**
Fungsi Polinomial	:	**Fungsi yang terdiri dari penjumlahan suku-suku, di mana setiap sukunya adalah hasil kali koefisien dengan variabel yang berpangkat bilangan bulat non negatif.**
Integral	:	**Anti turunan dari suatu fungsi $f(x)$ pada suatu interval, katakanlah interval I, jika $F'(x) = f(x), \forall x \in I$.** **Operasi kebalikan dari turunan.**
Integral Parsial	:	**Teknik integrasi dengan menggunakan rumus $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.**
Integral Substitusi	:	**Teknik integrasi dengan mengganti variabel agar bentuk fungsi menjadi lebih sederhana sehingga menjadi lebih mudah untuk diintegralkan.**
Integral Tak Tentu	:	**Integral yang hasilnya berupa fungsi umum ditambah dengan konstanta.**
Koefisien	:	**Angka yang dikalikan dengan variabel dalam suatu fungsi.**
Konstanta	:	**Nilai tetap dalam suatu fungsi yang tidak berubah.**
Turunan	:	**Laju perubahan nilai suatu fungsi terhadap variabelnya.**

GLOSARIUM

Variabel : **Simbol yang mewakili nilai pada suatu fungsi yang dapat berubah-ubah.**

INDEKS

Dr. Lina Nurhayati, S.Si.,M.Si adalah dosen LLDIKTI IV dengan penempatan pada Fakultas Teknik di Universitas Sangga Buana YPKP Bandung. Ia meraih gelar sarjana (S1) di bidang Matematika dari Universitas Pendidikan Indonesia (UPI), gelar magister (S2) di bidang Matematika dari Institut Teknologi Bandung (ITB), dan gelar doktor (S3) dalam bidang Pendidikan Matematika dari Universitas Pendidikan Indonesia. Fokus kajian dan penelitiannya berada pada pengembangan pembelajaran berbasis *Design Research* (DDR) serta perancangan desain didaktis yang relevan dengan kebutuhan mahasiswa teknik.

Prof. Dr. H. Didi Suryadi, M.Ed. adalah guru besar Pendidikan Matematika pada Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FPMIPA) Universitas Pendidikan Indonesia (UPI). Beliau meraih gelar sarjana (S1) dari IKIP Bandung, gelar magister (S2) dari La Trobe University, Australia, dan gelar doktor (S3) dari Universitas Pendidikan Indonesia. Sebagai penggagas *Didactical Design Research* (DDR) di Indonesia, beliau berperan penting dalam pengembangan teori pembelajaran matematika. Kiprahnya turut memberi kontribusi besar dalam peningkatan kualitas pendidikan dan pembinaan akademik di Indonesia.

Prof. Dr. H. Tatang Herman, M.Ed. adalah guru besar Pendidikan Matematika di Universitas Pendidikan Indonesia yang dikenal sebagai tokoh penting dalam pengembangan kebijakan, kurikulum, dan pembelajaran matematika di Indonesia. Ia menyelesaikan pendidikan sarjana di bidang Pendidikan Matematika di IKIP Bandung, magister di bidang Pendidikan Matematika di Deakin University Melbourne, Australia, dan doktor di bidang Pendidikan Matematika di Universitas Pendidikan Indonesia. Beliau aktif dalam penelitian dan pembinaan guru, serta berkontribusi besar dalam peningkatan mutu pendidikan matematika di berbagai jenjang.

Prof. Siti fatimah, Ph.D adalah dosen dan peneliti di bidang matematika dan pendidikan matematika serta asesor aktif dalam penjaminan mutu pendidikan tinggi di Indonesia. Ia menyelesaikan pendidikan sarjana di Universitas Pendidikan Indonesia, magister di Universitas Gadjah Mada, dan meraih gelar doktor (Ph.D) dari Utrecht University, Belanda. Kepakarannya dalam Pendidikan matematika mencakup pengembangan pembelajaran matematika dan evaluasi pendidikan, serta aktif terlibat dalam berbagai kegiatan akademik dan asesmen institusi pendidikan.

Nurmala Setianing Putri, M.Pd. adalah dosen pada Program Studi Pendidikan Matematika FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia. Ia menyelesaikan studi S1 dan S2 di bidang Pendidikan Matematika di Universitas Pendidikan Indonesia. Bidang keahliannya adalah pendidikan matematika.

Bill Chairy Rizki Bustaren, M.Pd. adalah dosen pada Program Studi Pendidikan Matematika FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia. Ia menyelesaikan pendidikan S1 dan S2 di bidang Pendidikan Matematika di Universitas Pendidikan Indonesia. Bidang keahliannya adalah pendidikan matematika.

INTEGRAL TAK TENTU

Dengan Teori Situasi Didaktis

Buku ini didesain sebagai bahan ajar inovatif yang dirancang untuk mengatasi kesulitan belajar mahasiswa teknik sipil dalam memahami konsep integral dan aplikasinya di bidang teknik sipil. Disusun berdasarkan pendekatan *Didactical Design Research* (DDR) dan Teori Situasi Didaktis dari Guy Brousseau, buku ini mengintegrasikan teori pembelajaran matematika modern dengan praktik kontekstual dan teknologi digital.

Melalui tahapan ***devolusi, aksi, formulasi, validasi,*** hingga ***institusionalisasi,*** mahasiswa tidak hanya diajak untuk memahami konsep, tetapi juga mengeksplorasi, membuktikan, dan mengimplementasikannya dalam kasus-kasus nyata teknik sipil. Aktivitas pembelajaran disusun sistematis dalam format Memecahkan Kode Awal, Eksplorasi, Konseptualisasi, Verifikasi, dan Implementasi.

Buku ini juga dilengkapi dengan pemanfaatan teknologi interaktif seperti **Graspable Math, Desmos Graphic Calculator,** dan **Augmented Reality (AR)** untuk memperkuat keterhubungan antara konsep abstrak dan fenomena nyata. Berbagai studi kasus dan soal kontekstual, seperti perhitungan defleksi balok, momen lentur, distribusi beban, dan analisis struktur jembatan dan jalan, membuat materi kalkulus menjadi relevan dan aplikatif bagi mahasiswa teknik sipil.

Buku ini diperuntukkan bagi dosen, mahasiswa, dan pendidik teknik/vokasi, tidak hanya sebagai bahan ajar, tetapi juga sebagai contoh konkret penerapan DDR dan inovasi teknologi dalam pembelajaran matematika teknik yang bermakna dan transformatif.

INDONESIA EMAS GROUP

PENERBIT
INDONESIA EMAS GROUP
Jalan Pasir Putih, No. 16 Kota Bandung
Kontak 082-188-188-540
E-mail: indonesiaemasgroup5758@gmail.com

ISBN 978-634-7311-02-3
9 786347 311023